

Алгебра

Монченко Н.М.

Аннотация

Целью данного курса является знакомство с общей алгеброй практически с нуля, то есть никакие специфические знания не предполагаются (хотя, конечно, не будут лишними). Планируется рассмотрение как классических и общеизвестных алгебраических конструкций (группы, кольца, поля), так и более современных, без которых современная содержательная математика абсолютно немыслима (категории, функторы), а также связи алгебры и геометрии (элементы коммутативной алгебры и классической алгебраической геометрии, понятие аффинной схемы и пр.).

Продолжительность курса: 1 семестр

Формат занятий: лекции (при необходимости можно провести семинарское занятие, заточенное под решение задач). Планируется несколько листочков с задачами для самостоятельного решения.

Желаемый результат: по окончании курса студент должен обладать базовыми навыками решения несложных алгебраических задач, а также владеть языком общей и частично высшей алгебры, необходимой для успешного освоения других разделов математики.

Пререквезиты: как таковых нет, курс «с нуля». Приветствуется знание математического анализа, линейной алгебры и базовых общематематических понятий.

Работа с литературой: курс задумывается самозамкнутым, то есть дополнительное изучение литературы не обязательно, но, конечно же, будет полезно.

Целевая аудитория: студенты физико-математических и технических специальностей, а также все заинтересованные в современной содержательной математике.

О лекторе: сотрудник Центра фундаментальной математики МФТИ, кафедры высшей математики (ведет математический анализ, линейную алгебру, теорию категорий), студент 6-го курса. Основные научные интересы: гомологическая алгебра и алгебраическая геометрия, теория точных категорий, теория представлений. Докладчик на семинаре лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры (МФТИ), ворк-шопе «Современная алгебраическая геометрия» (институт им. Эйлера, г. СПб).

Программа

1. Начала теории множеств: отображения множеств, мощность, теорема Кантора, отношение эквивалентности, фактормножество
2. Теория групп

- 2.1. Моноиды и группы
- 2.2. Действие на множестве
- 2.3. Классификация подгрупп
- 2.4. Гомоморфизмы групп, ядро, образ и коядро
- 2.5. Абелевы группы, абелианизация
- 2.6. Свободные группы, свободные абелевы группы
- 2.7. Задание группы с помощью образующих и соотношений, правила Титца,
- 2.8. Классификация конечно-порожденных абелевых групп
3. Начала теории категорий
 - 3.1. Категории, функторы, естественные преобразования
 - 3.2. Категория групп, категория множеств, категория абелевых групп
 - 3.3. Дуальная категория, эквивалентность категорий
 - 3.4. Сопряженные функторы, функторы забывания и свободы
 - 3.5. Аддитивные и абелевы категории
4. Кольца и модули
 - 4.1. Понятия кольца, гомоморфизмы колец, категория колец
 - 4.2. Идеалы, спектр кольца
 - 4.3. Коммутативные кольца
 - 4.4. Локализация кольца
 - 4.5. Модули над кольцом, свободные модули, нетеровы модули
 - 4.6. Категория модулей над кольцом, функтор расширения скаляров
 - 4.7. Векторные пространства
 - 4.8. *Идеалы в кольце многочленов, алгебраические многообразия, координатные кольца, теорема Гильберта о нулях*
 - 4.9. Элементы гомологической алгебры: короткие точные последовательности, комплексы, гомологии и когомологии
5. Поля
 - 5.1. Алгебраические расширения и алгебраическое замыкание
 - 5.2. Конечные поля
 - 5.3. Теория Галуа
 - 5.4. Неразрешимость алгебраических уравнений степени выше четвертой
6. Элементы теории представлений конечных групп
7. * Аффинные схемы, структурный пучок, склеивание схем, аффинная прямая и плоскость над полем

Список рекомендованной литературы

1. С. Ленг. Алгебра
2. Э.Б. Винберг. Курс алгебры
3. И.М. Гельфанд, Ю.И. Манин. Лекции по гомологической алгебре
4. М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру
5. *Ю.И. Манин. Введение в теорию схем и квантовые группы