

Линейная алгебра

Арутюнов А.А.

14 августа 2022 г.

В курсе будут рассказаны основные понятия и концепции современной линейной алгебры. Я постараюсь изложить линейную алгебру не в стандартном варианте, когда, фактически, одни и те же вещи рассказываются несколько раз, а последовательно. Мы пойдем от понятия векторного пространства к различным вариантам их оснащения (сопряженное пространство, скалярное произведение, метрика и т.д.). Хотя таким образом усвоение курса может быть более трудным, однако это даст возможность слушателям составить более структурированное понимание курса и подготовит к дальнейшему освоению других разделов математики: дифференциальных уравнений, функционального анализа и т.д..

Первые 3 раздела ориентированы на всех, кому нужна линейная алгебра: программистов, специалистов по data science, экономистов и т.д.. Два последних раздела можно считать более продвинутыми, они рассчитаны в первую очередь на студентов естественно-научных специальностей. После первых трех разделов будет коллоквиум, соответственно можно сдать только первую часть курса. Основной ход лекций будет дополнен дополнительными, которые призваны рассказать о важных сопутствующих математических понятиях.

Помимо лекций также будут семинарские занятия с решением задач и разбором теории.

1 Векторные пространства и линейные операторы

- Векторные пространства и линейные отображения. Основные примеры: \mathbb{R}^n , полиномы, плоскость и трехмерное пространство, матрицы. Понятие линейного оператора.
- Подпространства. Базисы, размерность, линейные оболочки. Дополнение базиса подпространства. Фактор-пространство. Определитель, ранг матрицы.
- Линейные операторы. Матричная запись линейного оператора (изоморфизм между пространством матриц и пространством линейных операторов, его зависимость от выбора базиса). Линейные функционалы. Композиции линейных операторов и умножение матриц. Обратные матрицы.

Дополнительная лекция: комплексные числа, алгебраические уравнения.

2 Жорданова нормальная форма

- Собственные векторы, собственные подпространства. Теорема Гамильтона-Кэли.
- Инвариантные подпространства, корневые подпространства. Нильпотентные операторы.
- Теорема о жордановой нормальной форме. Описание с помощью ЖНФ различных классов операторов: проекторы, нильпотентные операторы, решение уравнений, функции от матриц. Теорема Вейера.

Дополнительная лекция: Оценка сложности алгоритмов, вычисления.

3 Оснащения векторных пространств

- Билинейные и квадратичные формы. Сигнатура, Скалярное произведение. Критерий Сильвестра, теорема Якоби.
- Алгебра Грассмана, детерминант.
- Метрика. Изометрии, ортогональные матрицы.
- Матричные нормы (операторная, Фробениуса).
- Алгебра операторов. Псевдообратные матрицы. Сопряженные операторы.
- Декомпозиции: LU, SVD разложения и другие.
- Алгебры Ли.

Дополнительная лекция: теория групп, матричные группы, S^n .

4 Тензорный анализ

- Сопряженные пространства, линейные функционалы.
- Тензоры, алгебра тензоров. Перевод рассмотренных ранее конструкций на тензорный язык.
- Разложимые тензоры, координаты тензора.
- Внешнее и внутреннее произведение.

Дополнительная лекция – комплекс де Рама.

5 Теория категорий

- Категории, группоиды. Основные примеры категорий.
- Функторы, кофункторы, естественные отображения.

Список литературы

- [1] Винберг Э.Б., Курс алгебры
- [2] Ильин В.А., Позняк Э.Г., Линейная алгебра
- [3] Кострикин А.И., Манин Ю.И., Линейная алгебра и геометрия
- [4] Кострикин А.И., Введение в алгебру
- [5] Ленг С., Алгебра
- [6] Маклейн Дж., Категории для работающего математика
- [7] Арутюнов А.А., Ершов А.В., Дополнительные задачи по линейной алгебре
- [8] S. Axler., Linear Algebra Done Right
- [9] А.В. Ершов, Тензоры